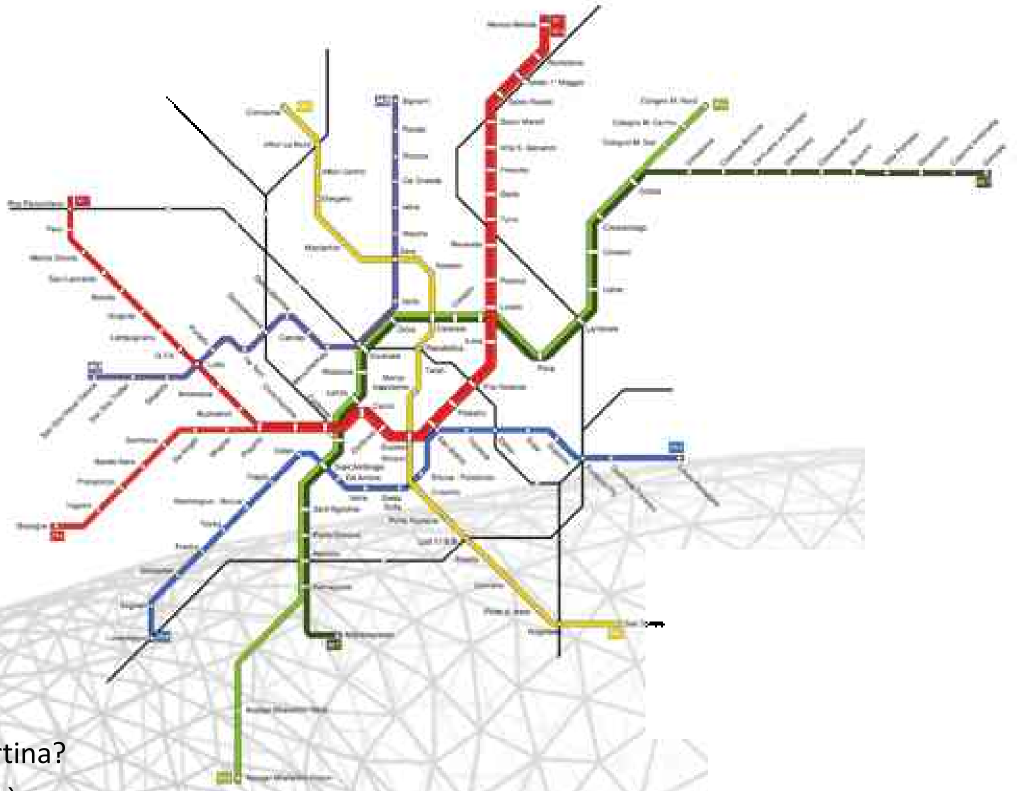
TIRARE
MA NON
STRAPPARE



È *giusta* questa cartina?

Allo stesso tempo sì e no.

Essa infatti non è in scala, non si sovrappone a una cartina della città e la distanza tra le stazioni non è affatto corretta: è deformata. Però dice quali sono le fermate, quale il loro ordine e quali i punti di intersezione tra le linee ed è questo che interessa al viaggiatore!

Per quale motivo alteriamo o ignoriamo alcune caratteristiche della realtà?

Perché per conoscere non possiamo dare la stessa importanza a tutti gli elementi, ma dobbiamo individuare quali sono i più rilevanti in relazione al nostro bisogno.

In questa mostra analizzeremo dal punto di vista matematico alcuni problemi che sono all’origine della nascita della topologia, detta anche *geometria del foglio di gomma*, e successivamente indagheremo sugli invarianti topologici, cioè sulle proprietà che permettono di classificare le superfici stabilendo quelle tra loro topologicamente equivalenti. Mentre in ambito artistico, attraverso l’analisi di alcune opere, cercheremo di capire perché alcuni artisti abbiano indagato il proprio rapporto con la realtà alterandone la forma.

FONDAZIONE GROSSMAN

QUANDO LA RAGIONE SI FA SCUOLA

TIRARE MA NON STRAPPARE

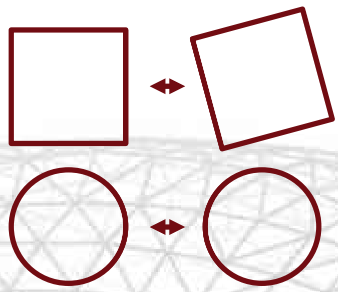
QUALE GEOMETRIA?

Felix Klein nel 1872 dà una definizione costruttiva e generale di geometria: lo studio delle proprietà di una figura che restano immutate (invarianti) rispetto ad un particolare gruppo di trasformazioni.

Una trasformazione geometrica piana è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto P del piano uno e un solo punto P' del medesimo.

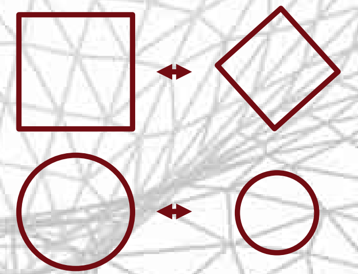
GEOMETRIA EUCLIDEA METRICA

Geometria determinata da una **isometria**.
Una isometria è una qualunque trasformazione che conserva le distanze, ossia tale che AB = A'B'.
Esempi di isometrie sono la traslazione, la rotazione e le simmetrie, ognuna delle quali descrive un movimento rigido che permette la sovrapposizione di figure che risultano quindi tra loro congruenti.
Proprietà invarianti: lunghezza, area, ampiezza degli angoli, parallelismo e perpendicolarità.



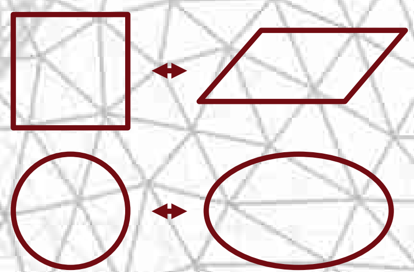
GEOMETRIA EUCLIDEA SIMILE

Geometria determinata da una **similitudine**.
Una similitudine è una qualunque trasformazione che conserva il rapporto tra le distanze, ossia tale che AB/A'B'= k
Proprietà invarianti: ampiezza degli angoli, parallelismo e perpendicolarità.
Proprietà non invarianti: lunghezza, area.
Le isometrie sono particolari similitudini (quelle per cui il rapporto tra le distanze è 1) e quindi ogni proprietà simile è anche metrica.



GEOMETRIA AFFINE

Geometria determinata da una **affinità**.
Una affinità è una qualunque trasformazione che conserva le rette, ossia l'allineamento di tre qualsiasi punti distinti.
Proprietà invarianti: parallelismo tra rette e congruenza tra segmenti
Proprietà non invarianti: forma (lunghezza, ampiezza degli angoli, rapporto tra le distanze, area).
Le isometrie e le similitudini sono particolari affinità.



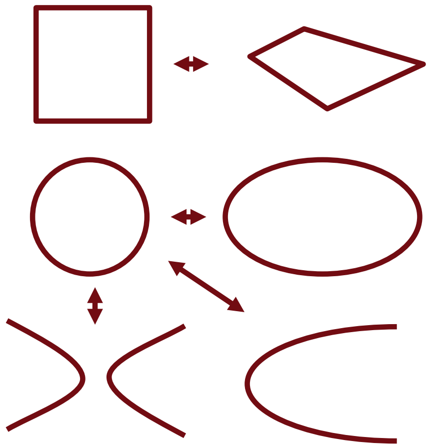
FONDAZIONE GROSSMAN

QUANDO LA RAGIONE SI FA SCUOLA

TIRARE MA NON STRAPPARE

GEOMETRIA PROIETTIVA

Geometria determinata da una **proiettività**, ossia da una trasformazione che si ottiene componendo un numero finito di proiezioni; tuttavia per avere una corrispondenza biunivoca, bisogna aggiungere dei nuovi punti all'infinito che formano una retta, detta *retta impropria*; intuitivamente possiamo pensarla come la geometria delle ombre.
Proprietà invarianti: rette e birapporti.
Le proiettività non conservano i punti all'infinito, ossia possono portare un punto proprio in un punto all'infinito e viceversa.
Le affinità del piano coincidono con le proiettività che conservano la retta impropria.

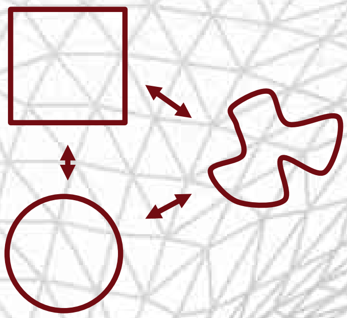


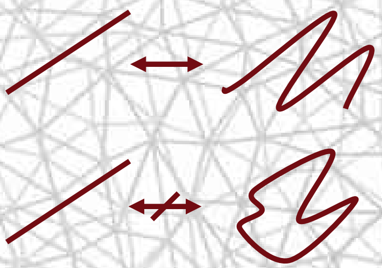
Due punti all'infinito

Un punto all'infinito

TOPOLOGIA

Geometria determinata da un **omeomorfismo**.
Un omeomorfismo intuitivamente è una trasformazione invertibile e continua, così come la sua inversa, cioè una trasformazione che porta punti vicini in punti vicini.

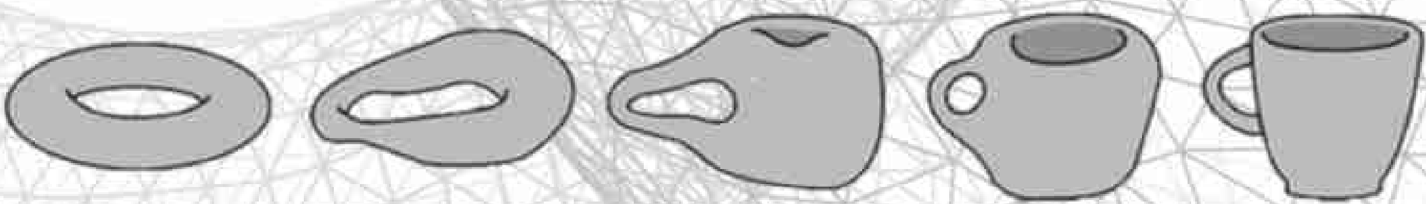




La figura può essere deformata, senza però effettuare lacerazioni o congiungimenti di punti distinti.

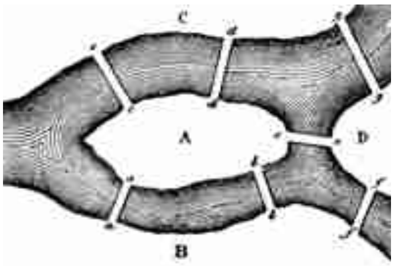
La figura può anche essere tagliata e deformata a patto che dopo la deformazione si incolli negli stessi punti in cui si era effettuato il taglio.

Invarianti topologici di figure: essere connesse, buchi, bordi, orientabilità.
Proprietà non invarianti: distanza, lunghezza, ampiezza degli angoli, area, parallelismo, perpendicolarità e allineamento.



I PONTI DI KÖNIGSBERG

L'antica città di Königsberg è il teatro di un celebre problema topologico. La città è attraversata dal fiume Pregel, che forma due isole. Le isole sono collegate da un totale di sette ponti.

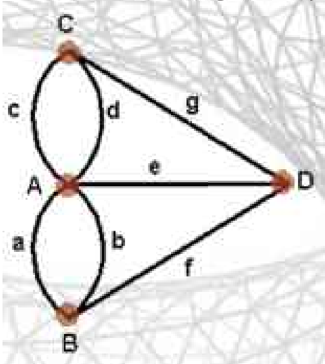


È possibile immaginare una passeggiata che, partendo da un punto della città passi una e una sola volta da ognuno dei sette ponti e ritorni al punto di partenza?
Il problema dipende da come sono posizionati i ponti e da quali parti della città mettono in collegamento, ma non dipende da misure, angoli e forme rigide dei ponti e delle isole.

Eulero nel 1736 risolve il problema, aprendo un nuovo orizzonte per la matematica, la Teoria dei grafi:

GRAFO: è un insieme di punti (detti **vertici** o nodi) e di linee (dette **spigoli** o archi o lati) tale che ogni spigolo unisce due vertici
Il **grado** di un vertice è il numero di spigoli che hanno per estremo quel vertice; un vertice si dice **pari** se ha grado pari, dispari se ha grado **dispari**
Ogni grafo suddivide il piano in un numero finito di regioni dette **facce**
GRAFO PLANARE: è un grafo in cui gli spigoli non si intersecano tra loro, se non nei vertici
GRAFO CONNESSO: è un grafo in cui per ogni coppia di vertici esiste una successione di spigoli consecutivi che li unisce
GRAFO EULERIANO: è un grafo in cui esiste un percorso che passa una e una sola volta per tutti i suoi spigoli

La possibilità di attraversare una e una sola volta tutti gli spigoli di un grafo è una proprietà topologica che quindi rimane invariata se sottoposta a trasformazione topologica, o omeomorfismo.
Definita la teoria dei grafi, il problema dei ponti di Königsberg può essere così rappresentato:



Risolvere il problema è equivalente a determinare se tale grafo è euleriano.

TEOREMA
Affinché un grafo sia euleriano occorre che i vertici di grado dispari siano 2 (allora il punto di partenza e di arrivo sono diversi) oppure 0 (in questo caso il punto di partenza e quello di arrivo coincidono).

Nel nostro grafo tutti e quattro i vertici sono dispari, perciò l'itinerario richiesto non esiste (per ottenerlo basterebbe ad esempio eliminare uno qualsiasi dei ponti).

TEOREMA

In un grafo il numero di vertici dispari è sempre pari.

Se per ogni vertice di un grafo si sommano gli spigoli che vi convergono si ottiene il doppio del numero degli spigoli (perché ogni spigolo è contato due volte dato che ha 2 vertici), dunque un numero pari. Il contributo a tale somma da parte dei vertici pari è certamente pari (essendo la somma di numeri pari), quindi anche il contributo dei vertici dispari dev'essere pari e perciò il numero di vertici dispari dev'essere pari.

Se un grafo non è euleriano non basta un solo tratto di penna continuo per disegnarlo.

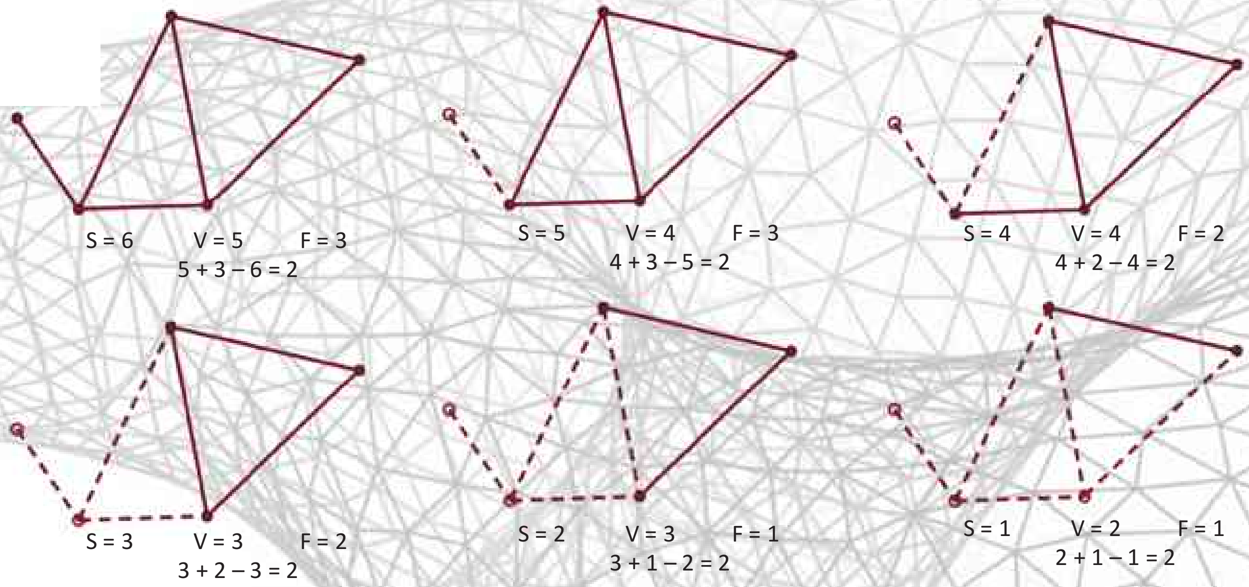
Qual è il numero minimo di tratti necessari?

TEOREMA

Se un grafo non è euleriano, il minimo numero di attraversamenti connessi che percorrono una e una sola volta ogni spigolo è uguale alla metà del numero dei vertici dispari.

RELAZIONE DI EULERO

Per quanto riguarda un grafo planare connesso esiste una relazione matematica tra il numero di spigoli (S), di vertici (V) e di facce (F).



Infatti se prendiamo un qualsiasi grafo, notiamo che ogni volta che togliamo uno spigolo in maniera che il grafo rimanente sia ancora connesso, allora sparisce o una faccia o un vertice.

Questo significa che l'espressione V + F – S rimane uguale prima e dopo aver rimosso uno spigolo. Se noi togliamo man mano tutti gli spigoli eccetto uno, alla fine abbiamo un solo spigolo, due vertici e una sola faccia (quella esterna), dunque:

$$V + F - S = 2$$

La formula di Eulero rimane valida se il grafo planare e connesso è disegnato su una sfera.

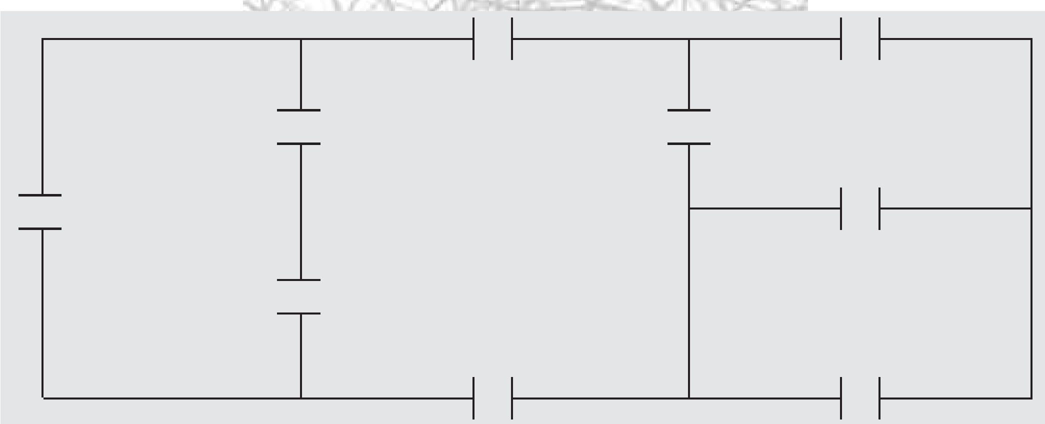
PROBLEMA DELLE TRE CASE

Tre case devono essere allacciate a tre servizi, acqua, luce e gas. È possibile congiungere ogni casa con ogni servizio senza che gli allacciamenti si incrocino?

Usiamo la formula di Eulero. Se la soluzione esistesse, sarebbe un grafo piano con 6 vertici (3 case e 3 utenze) e 9 spigoli (ogni casa ha 3 allacciamenti), e quindi, per la formula di Eulero, 5 facce. Apparentemente non sappiamo nulla delle facce. In realtà possiamo osservare che ogni faccia deve avere un numero pari di spigoli, perché non ci sono spigoli che congiungono due case o due servizi. Inoltre non ci sono facce con solo due spigoli, perché c'è un solo spigolo per ogni coppia di vertici. Quindi, poiché ogni faccia ha almeno quattro spigoli, e ricordando che ogni spigolo è in comune a due facce, troviamo che $S \geq 4\ F/2$, quindi $S \geq 2\ F$, da cui l'assurdo $9 \geq 10$.

PROBLEMA DEL MUSEO

Si deve organizzare una mostra e si hanno a disposizione alcune stanze comunicanti tra loro come indicato nel disegno. Per favorire l'afflusso del pubblico ed evitare "ingorghi" si vorrebbe stabilire un percorso che attraversi tutte le porte una sola volta. È possibile? Se non fosse possibile, quale potrebbe essere una modifica degli accessi alle stanze in modo da poter realizzare un tale percorso?
E se si volesse iniziare e terminare il percorso in E (esterno della mostra)?

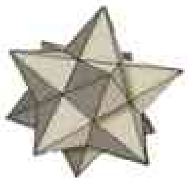


POLIEDRI

Definizione

Un **poliedro** è una figura costituita da facce poligonali in cui ogni spigolo è condiviso da due facce mentre da ogni vertice si diramano almeno 3 spigoli

Faccia (F): è un poligono
Spigolo (S): è il segmento in cui ogni coppia di facce adiacenti si incontra
Vertice (V): è il punto in cui gli spigoli adiacenti si incontrano



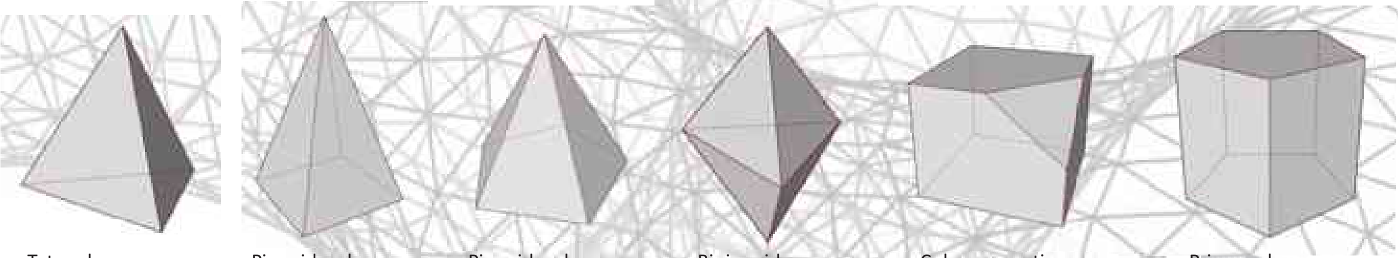

Queste figure soddisfano la precedente definizione di poliedro, ma non siamo abituati a trattarli come tali, perché nel nostro immaginario un poliedro è convesso!

Definizione

Un **poliedro convesso** è un oggetto che soddisfa la definizione precedente e per cui, considerati due punti qualsiasi dell'oggetto, il segmento che ha per estremi tali punti è interamente contenuto nel poliedro
oppure
Un poliedro è convesso se il piano contenente ciascuna faccia divide lo spazio in due semispazi, ed il poliedro è interamente contenuto in uno solo di questi.

Come classificare i poliedri?

Analogamente ai poligoni, classificabili in base al numero dei lati (e vertici), Eulero si propone di adottare lo stesso criterio per la classificazione dei poliedri, contando facce, vertici e spigoli



Tetraedro
F=4
S=6
V=4

Piramide a base quadrata
F=5
S=8
V=5

Piramide a base pentagonale
F=6
S=10
V=6

Bipiramide triangolare
F=6
S=9
V=5

Cubo con vertice smussato
F=7
S=15
V=10

Prisma a base pentagonale
F=7
S=15
V=10

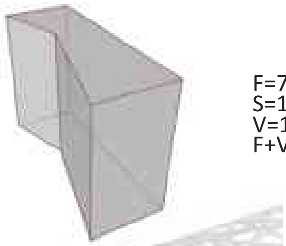
Esistono poliedri diversi con lo stesso numero di facce, vertici e spigoli: dunque queste caratteristiche non sono sufficienti per distinguere i poliedri fra di loro.

Eulero trova una relazione tra il numero di facce, vertici e spigoli di un poliedro:

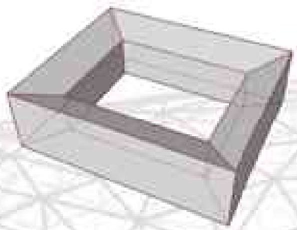
$$F + V - S = 2$$

La relazione di Eulero non riguarda aspetti metrici del poliedro (la misura degli spigoli e l'ampiezza degli angoli) ma soltanto il *numero* di facce, vertici e spigoli: è quindi un invariante topologico. Nella sua dimostrazione Eulero usa il metodo della **riduzione**: partendo da un poliedro convesso qualunque, è possibile ridurlo sistematicamente sezionandolo, fino ad ottenere un poliedro molto più semplice, una piramide. L'idea di base è quella di eliminare i vertici uno alla volta, rimuovendo ogni volta una o più piramidi fino a fare rimanere soltanto quattro vertici e dunque ottenere un tetraedro, per il quale vale la formula di Eulero.
Osserviamo che questo metodo è analogo a quello visto con i grafi.

La relazione di Eulero vale comunque per qualsiasi poliedro?



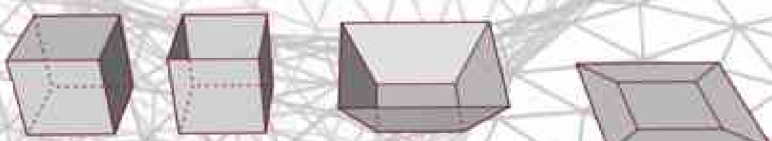
F=7
S=15
V=10
F+V-S = 7+10-15=2

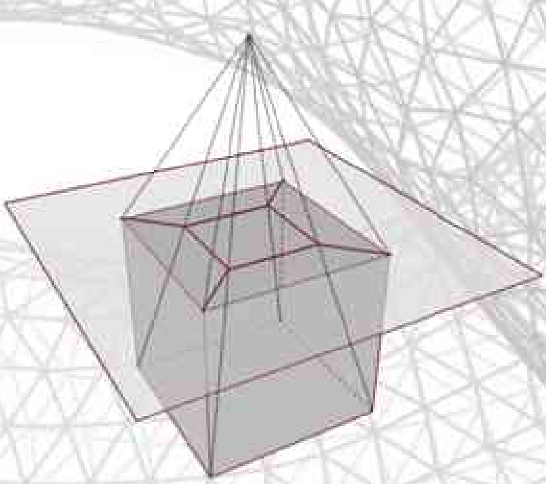


F=16
S=32
V=16
F+V-S =16+16-32=0

Questa formula vale per tutti i poliedri topologicamente equivalenti a una sfera (che possiamo immaginare di gonfiare fino a farli diventare sferici). Questo significa che la relazione di Eulero è un **invariante topologico**.

Immaginiamo la superficie del poliedro costituita di gomma sottile e infinitamente elastica: togliamo una faccia e guardiamo il poliedro "dentro", come se mettessimo la testa all'interno; otteniamo un **grafo planare,** dove il numero di S, V e F resta immutato rispetto al poliedro , tenendo conto che la faccia tolta si è estesa lungo tutto il piano esternamente al grafo.





Un altro modo per dimostrare la relazione è il **diagramma di Schleghel**:
Proiettiamo il poliedro sul piano di una faccia F da un punto P esterno al poliedro, vicino alla faccia considerata e scelto in modo che le proiezioni degli altri vertici del poliedro risultano interni alla faccia considerata (che coincide con la sua proiezione). Si crea un grafo planare in cui vale la relazione di Eulero.

TIRARE MA NON STRAPPARE

SUPERFICI

Una superficie è una figura geometrica senza spessore, avente solo due dimensioni. Se la immaginiamo come un foglio di gomma infinitamente deformabile, le uniche proprietà che distinguono una superficie da un'altra sono invarianti topologici.

Possiamo individuare due **invarianti topologici**:

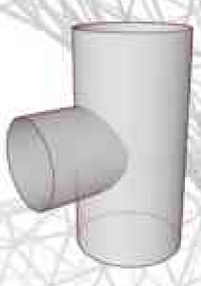
- **faccia**: una superficie può avere una o due facce. Se ci sono due facce abbiamo due punti di vista, uno esterno e uno interno alla superficie. Se la faccia è una, non c'è distinzione tra interno ed esterno, come nel nastro di Möbius. In realtà non è del tutto corretto parlare di faccia di una superficie (e quindi di “fuori” e “dentro”): tale “concetto” risulta dall’osservazione della superficie dallo spazio tridimensionale che la circonda. Per una creatura bidimensionale che viva “nella” superficie, l’idea di faccia non ha alcun senso. È il concetto di **ORIENTABILITÀ** a definire tale idea. Se, partendo da un punto in cui si è fissato un verso orario e muovendosi sulla superficie considerata lungo un qualsiasi percorso chiuso, si ritorna nel punto iniziale ritrovando lo stesso verso iniziale, si dirà che la superficie è orientabile. Intuitivamente una superficie orientabile è una superficie su cui hanno senso i concetti di “senso orario” e “senso antiorario”.

- **BORDO**: confine tra due facce che permette di passare da una all'altra. Se una superficie non ha bordi e non è possibile raggiungere in alcun modo una sua faccia a partire dall’altra, allora la superficie è **chiusa**. Le superfici chiuse non hanno bordi.

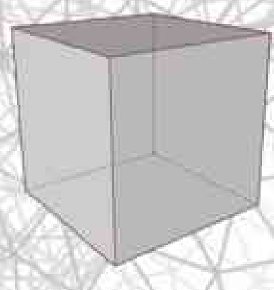
non chiusa
2 facce
1 bordo

non chiusa
2 facce
2 bordi

non chiusa
1 faccia
1 bordo
NASTRO DI MÖBIUS



non chiusa
2 facce
3 bordi

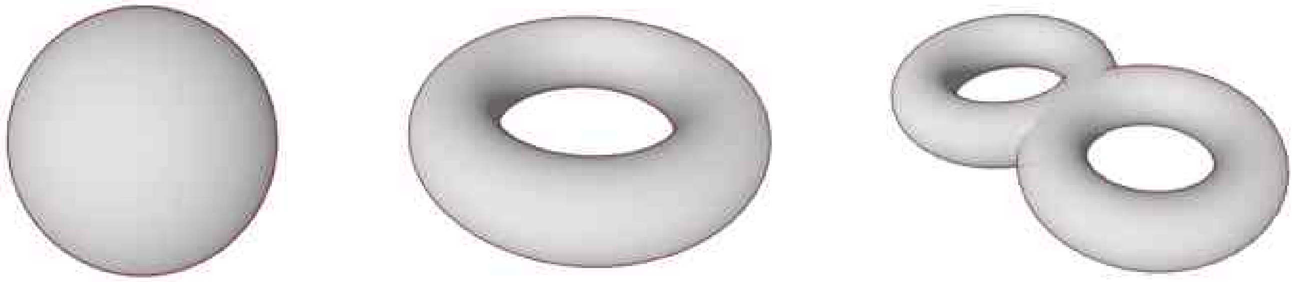


chiusa
2 facce
0 bordi

Di fatto una superficie orientabile ha due facce, mentre una non orientabile ne ha una, come il nastro di Möbius.

SUPERFICI CHIUSE

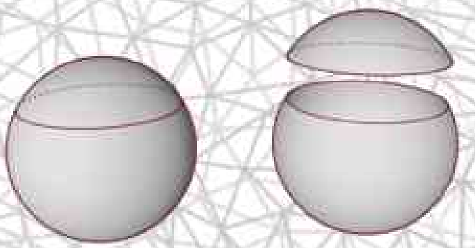
Consideriamo le seguenti superfici chiuse:



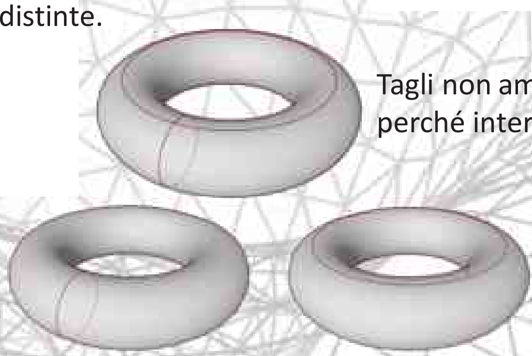
Evidentemente non sono superfici tra loro omeomorfe, pur essendo orientabili e senza bordi. Intuitivamente la differenza sembra il numero dei "buchi", ma il problema è che il buco non fa parte della superficie: è una caratteristica del modo in cui la superficie è immersa nello spazio tridimensionale (proprio come l'idea di faccia).

Il problema è quindi trovare un invariante topologico in grado di descrivere il numero di buchi presenti.

GENERE DI UNA SUPERFICIE: il numero massimo di tagli (curve chiuse appartenenti alla superficie) che non si intersecano e che non dividono la superficie in componenti distinte.

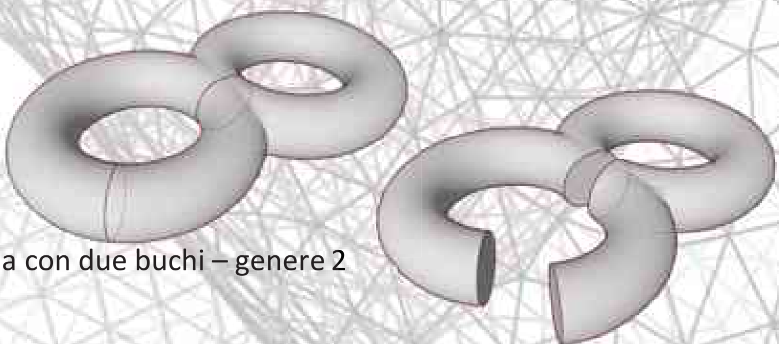


Sfera – genere 0



Tagli non ammessi perché intersecati

Toro – genere 1



Ciambella con due buchi – genere 2

Il genere di una superficie è un altro **invariante topologico**.

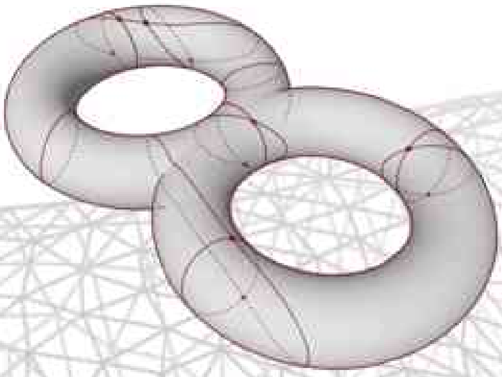
CARATTERISTICA DI EULERO

Abbiamo visto che per i poliedri omeomorfi alla sfera, di genere 0, è valida la formula di Eulero $V + F – S = 2$; mentre per il poliedro omeomorfo al toro, di genere 1, vale che $V + F – S = 0$.

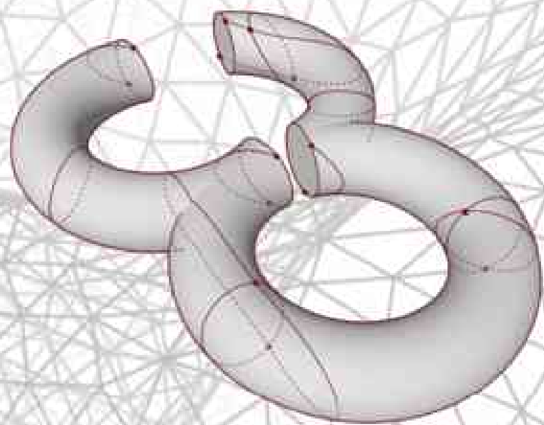
L'espressione $V + F – S$ viene denominata **numero** o **caratteristica di Eulero**; è una proprietà intrinseca dei poliedri, dunque un **invariante topologico**.

La relazione tra la caratteristica di Eulero e il genere (n) è la seguente: $\mathbf{V + F – S = 2 - 2n}$

Estendiamo la caratteristica di Eulero anche alle superfici chiuse a due facce.



Sia M una superficie di genere p e consideriamo una sua "**tassellatura**"; otteniamo in questo modo un grafo planare su M.
Siano V il numero dei vertici, F il numero delle facce e S il numero degli spigoli del grafo ottenuto.



Tagliamo la superficie M lungo p contorni della tassellatura sui quali si trovano rispettivamente $n_1, n_2, …, n_p$ vertici e $n_1, n_2, …, n_p$ spigoli in modo da ottenere una superficie M^I di genere 0; siano V^I il numero dei vertici, F^I il numero della facce e S^I il numero degli spigoli del grafo su M^I.

Si ha:

$\mathbf{V^I=V + n_1 + n_2 + … + n_p}$

$\mathbf{F^I=F + 2p}$

$\mathbf{S^I=S + n_1 + n_2 + … + n_p}$

Per la superficie S^I, essendo omeomorfa a una sfera, vale che $\mathbf{V^I + F^I – S^I = 2}$

ovvero $\mathbf{V + n_1 + n_2 + … + n_p + F + 2p - S – n_1 - n_2 - …- n_p = 2}$

pertanto $\mathbf{V + F - S = 2 – 2p}$

23 4! 567896 :9; <4:=>59?9

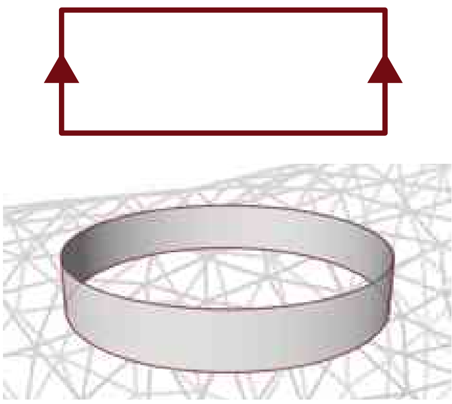
!"# $%&'( )* +*,"' '($(#(-*.(* .(&./"* .0/ ."1""/1*22"&(%&" ,%$/13*.*/ ,(&(4%/##*)* (1*/&"'5*#*'6 / &%7/1( )* 5(1)*8

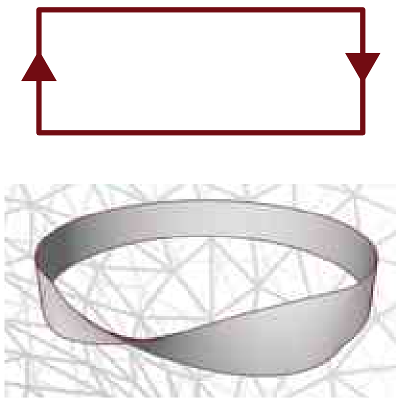
9"1'/&)( )" %&" ,'1*,.*")* 3(-#*(")%/ 3"../ $(,,(("/&/1/ :

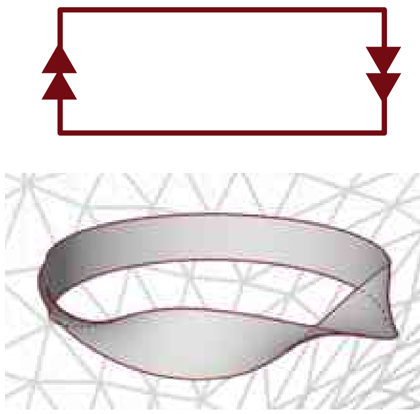
!"#$%& '()(*+%('&
%&" ,%$/13*.*/ ")%/ 3"../ /)%/ 5(1)*; &(& .0*%,"; (1*/&"'5*#/ <=>?

!"#$%& +(,-.(/#
%&" ,%$/13*.*/ " %&" 3"..*" / %& 5(1)(; &(& .0*%,"; &(& (1*/&"'5*#/ <@A=>?

!"#$%& '&* 0(%& (*$1%&
%&" ,%$/13*.*/ ")%/ 3"../; .0*%,"; (1*/&"'5*#/ <BC=>?





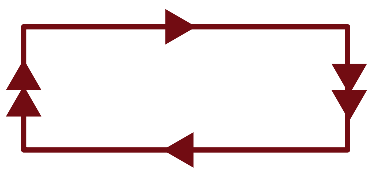


!%/ ,%$/13*.* ,(&('($(#(-*."7/&'/ /4%*+"#/&'*; .*(D (7/(7(13/; ,/ / ,(#(,/ 0"&&(#(,'/,,(&%7/1( )* 5(1)* / #" 7/)/,*7" (1*/&"'5*#*'6E '"#* ."1""/1*,'*.0/ ,(&(*&3""* *&+"1*"&'* '($(#(-*.*8

F# &",'1(.*#*&)1*.(/ *# &",'1(.(& -*1(*&'/1(,(&('1" #(1(7/(7(13*; *& 4%"&'(,(&(/&'1"75* (1*/&"'5*#* /) 0"&&(#(,'/,,(&%7/1( )* 5(1)*8 G" '1",3(17"2*(&/)* %&(& /##H"#'1(,* ("*/&/ '"-#*"&)(*# .*#*&)1(; 3"./&)(3"1/ %& -*1(*&'/1("##" ,%$/13*.*/ / 1*""""..."&)(#*8

I/ +(#/,,*7(3"1 .(*&.*)/1/ *# &",'1( )* JK5*%, .(& 4%/##(.*#*&)1*.( )(+1/77('"-#*"1#(; 3"1/ 7/22(-*1(/ 1*""""..."1#(8 J" .(,L 3"./&)(; 4%"&)(,* 1*""""..."&(#/)%/ /,'1/7*'6; * $%&'* .0/ $1*7" /1"&(+*.*&* (1" ,(&(,""* "##(&"'"'*: '"#/ ($/1"2*(&/ &(& D $/17/,," *& '($(#(-*"8 F&3""* #/)%/ ,%$/13*.* &(& ,(&((7/(7(13/: &(& 0"&&(&M #(,'/,,(&%7/1( )* 5(1)*; &M #" ,'/,, " (1*/&"'5*#*'68

N0/ ,%$/13*.*/ ,* ("*/&/ /,/-%/&)(,%##" ,'1*,.*")* 3(-#*(#/ ($/1"2*(&* *##%,'1"'/ *& 3*-%1"O



&"(!'#)'#,"-&.'

!""#$$%&'()*)+'*,%*$%$$&*#*$+#*&*-',$+&*.#)2&*$'&)&'+.&*.)-3&$%2&-'.(#-$#*-#.*(#11)4*5),&5$'67&)* 3&+&*'$$)+-)*'.*-',$+)8*9.*+&,%.$'$)*,'+:*2&;$%,$$&*#*$+#*&*5',&<

J'.*-',$+)*F&.&-2+&5)*,&*)$$#-3)-)*2%#*-',$+&* 5&.&-2+&5&*,$'55'$&4*2#..'*,$#,;* .%-36#11'*2&*C%#..)*)+&3&-'.#*

J'.*-',$+)*2&*KLE&%,*,&*)$$&#-#* %-*,).)*-',$+)4*';;&$'$)*5)-*%-* 3&+)*&-$#+)4*.%-3)*&.*2)00&)*2&* C%#..)*)+&3&-'.#8

J'.*-',$+)*5)-*&.*3&+)*&-$#+)* ,&*)$$#-3)-)*2%#*-',$+&*5)-* 3&+)*&-$#+)*5)-5'$#-'$&*2&* .%-36#11'*0'+&*'*C%#..)*)+&3&-'.#8*

=#.*>?*#*-#.*@?*5',)*,&*)$$#-3)-)*+&,%.$'$&*&A2&%+,*#,,#-2)*$)0).)3&5'(#-$#*#C%&;'.#-$&4*C%#5&)*0 .'*2&""#+#-1'*2#&*+&,%.$'$&*2&0#-2#*2'.*()2)*&*2%#*%0#+"&5&*,)-)*&((#+,#*-#..)*,0'1&)* $+&2&(#-,&)-'.#8

D&0#$&'()*.'*,$#,,'*)0#+'1&)-#4*)0#+'-2)*C%#,$'*;)*$%-*$'3.&)*-)-*-#.*(#11)*('*'*%-*$#+1)*2'*%-)*2#&* 2%#*E)+2&8*F6#*5),'*,&*)$$&#-#G*H+);'+#*0#+*I*5+#2#+#

!"#$%&&'(!'"#)'#*!+',

M-N'.$+' ,%0#+"&5&# %-&.'$#+'.# O .' E)$$&3.&' 2&$P2#Q#4.&R P.#&- -#. >SST4 ,$+#$$'(#-$# .#3'$' '. -',$+) 2& KLE&%, ;&,$) 0+#5#2#-$#(#-$#< O &-'"$$&)$$#-&E&.# '55),$'-2) 2%#-'2& KLE&%, # '"5#-2)-# 5)&-5&2#+# & E)+2&8 U'.# ,%0#+"&5&# O ."+&)0,&$) 0),$) 0+#5#2#-$#(#-$#V
W'E)$$&3.&' 2& P.#&- O -)-)+&#-$'E&.# # 0+&;' 2& E)+2&8 !,,'4 -)- ;&,&E&.# &- @ 2&(#-,&)-& # C%&-2& ,).) 'EE)11&-&# ,&,$#(' $+&2&(#-,&)-'.# 3+"'&5)4 2#;# +&56&%2#+,& ,% ,7 ,$#,,(#-$#('..N'.'(E&55) ' 5)..) 2& 5&3-)4 $%$$';&' -)- 0+#,#-$' -7 %-$#+,#1&)-# -7 %- #.,$#+-)8 W' 5),$+%1&)-# -)- O 0#+X +#'.(#-$# 0),,&E&.# $$&& ,#+;&+#EE# %-' C%'+$' 2&(#-,&)-# 0#+ 0)$#+# +&56&%2#+# &5&# ,#-1' 56# #,,' ,& &-$#+,#56& 5)- ,# ,$#,,'8

!"#$%&'"()*#+(""*#,&"&%*-!&.(#+!#/.*#)*$$*

G+$$%/-).% :- ",,"#" :- ?#%/&") +/ .)$$).%/:% -/ '+- %</- #"< -%/" 2.)#" -/'(+,%7 3 '%(%#)&) '%/ +/ '%(%#" "A '%." ,- +,)A :+" #'%/- '%/?-/)/&- 2," >)//% +/ &#)&&% -/ '%.+/"A /%/ ,%(% +/ $+/&%,7 (&)/% ,".$#" '%(%#)&" '%/ '%(%#- :-0"#,-8
1234 5 64 7289:; 86768; <6 =;4;:6 =>9 <;??638; 3@9:9 3 <6AB6;A9 B9: =;4;:3:9 67 D29AE; 8;<; 64 83BB38;7<;F
H(I+,,".;+#<% 3 '-#'%/:)&% :)(() J#)/'-)A :)(K"(<-% " :)(() L"#.)/-)A &#" ,&)&- '-),'+/% :"- *+)(- '%/?-/) '%/ <(-)(&#- :+" 2,-&+)@'-%>".)&-@@)&) -/ ?-<+#)78 !"# *+",&% ,%/% /""",,)#-)(."/% *+)&&#% '%(%#-

9#):+'-).% -($#%;(".) -/ +/ (-/<+)<<-% .)&".)&-'%8 =)&% '> " (" +/-'>" -/?%#.)@-%/- '>" '- -/&"#",,)/% ,%/% *+)(- #"<-%/- '- ,%/% " '%/ '>- '%/?-/)/%A $%,,-).% B(-@@)#"C +/) ')#&-/) '%." ,"<+"D ?)"-).% +/ $+/&%)((E-/&"#/% :- %</- #"<-%/" "A '%/ :"((" (-/""A '%(".%>&#) (%#% - $+/&- '>")$$)#&"/<%/%) #"<-%/- '%/?-/)/&-8 F ,".$#" $%,,-;-(" :"&"#.-/)#" - $+/&- -/ .%:% '>" /",,+/) :"((" (-/"" ,- -/&"#,"'>- '%/)(&#"8

M&&"/-).% -/ *+",&% .%:% +/ <#)?% $()/)#" '%//",,%8
H($#%;(".) ,- &#):+" *+-/:- /"(:"&"#.-/)#" -(.-/-.% /+."#% :- '%(%#- /""",,)#-) '%(%#)#" - 0"#&-'- :- +/ <#)?% $()/)#" '%//",,% -/ .%:% &)(" '>" :+" 0"#&-'-A '%(("<)&- &#) (%#% :) +/% ,$-<%(%A /%/);;-).% (% ,&",,% '%(%#"8

H(P/+."#%P.-/-.%P:-P'%(%#-P/""",,)#-%P63?@3F637E9#E;B;48;G6=;

0(&%()* +(! 1/*00%& ,&"&%!

!"# $%&"# '%(%#)#" *+)(,-),- .)$$) $-)/) ,"#0%/%)($-1 *+)&#% '%(%#- 2'-%3 ,- $+4 56'%(%#)#"78

=-.%,&#)#" *+",&% &"%#".) 3 $)#&-'%()#."/&" '%.$(",,%O ()+) :-.%,&#)@-%/" >) #-'>-",&%A &#) (E)(&#%/",&"/,-0% #-'%#,%)('%.$+&"#A $"# +/) :"((" $#-." 0%(&" /'(&%#-) :"(() .)&".)&-')8 F ,".$(-"" -/0""" :-.%,&#)#" '>" $"# '%(%#)#" +/ *+)(,-),- <#)?% $()/)#" '%//",,% ,%/% /""",,)#-)($-1 '-/*+" '%(%#-8

0(&%()* +(! ,!.1/(,&"&%!

!"# $%&"# '%(%#)#" *+)(,-),- .)$$) $-)/) ,"#0%/%)($-1 '-/*+" '%(%#- 2'-%3 ,- $+4 N6'%(%#)#"78

I) <68;AE:3C6;7)9 00-"/" B9: 67<2C6;7?9

V"('),% -/ '+- () .)$$) 3 ?%#.)&) :) N #"<-%/-A "0-:"/&"."/&" 3 $%,,-;-(" N6'%(%#)#()8
!"# -/:+@-%/"A ,+$$%/-).% '>" ,-) $%,,-;-(" N6'%(%#)#" +/ .)$$) '%/ /6Q #"<-%/-8

!#"/:-).% *+-/:- +/) *+)(,-),- .)$$) " '%/,-:"#-).%/" -(,+ % <#)?% $()/)#" :- / 0"#&-'-A '%/ /WN8
F $%,,-;-(" :-.%,&#)#" '>" -/ %</- <#)?% $()/)#" '%//",,% 'E3)(."/% +/ 0"#&-'" 0 '>" 3 '%(("<)&% '%/)($-1 N 0"#&-'-8
9%<(-).% *+",&% 0"#&-'" " &+&&- <(- ,$-<%(-): ",,% '%(("<)&% &(M&&"/-).% *+-/:- +/ <#)?% '%/ /6Q 0"#&-'-A '>"A $"# -$%&/:+@-%/"A
,)$$-).% N6'%(%#)#"8 M#) '- ,%/% :+" '),-D

S7 H(0"#&-'" "#) '%(("<)&% '%/ QA TA R % 5 0"#&-'-A % '%/ N 0"#&- +/ '%(%#" #-$"&+&%8
H/ *+",&% '),% $%,,% '%(%#)#" 0 '%/ +/% :"- '%(%#- '>" /%/ ,%)&% +&-(-@@)&- $"# '%(%#)#" - 0"#&-'-) '+- "#) '%(("<)&%8
U-",'% *+-/:-) N6'%(%#)#" (E-/&"#) .)$$)8

K7 H(0"#&-'" "#) '%(("<)&% '%/ N 0"#&-'- &+&&- :- '%(%#- :-0"
U)<-%/-).% '%." ,"<+"D

!)#&-).% :)(0"#&-'" #%,,% 0Q" '- ,$%,&-).% ,%(% &#) 0"#&-'-):-)"'/&- '>" ,%/% #%,,- % 0"#:-8 M&&"/-).% *+-/:- +/) ')&"/) :- 0"#&-'- &+&&- #%,,- " 0"#:- -/)(&"#/)/@)8

X%..+&-).% -(#%,,% -/ 0"#:" " -(0"#:" -/ #%,,%8 M#)A ," -(0"#&-'" 0R /%/ 3 /"(() ')&"/)A 0+%(:-#" '>" 0R 3 0Q ,%/% '%(%#)&- :- 0"#:"A " *+-/:- $%,,% '%(%#)#" -(.-% 0"#&-'" Y :- #%,,%

G" -/0""" - 0"#&-'- 0Q " 0R ,%/% '%(("<)&- :) +/) ')&"/) :- 0"#&-'- #%,,- " 0"#:-A)((%#) &)(" ')&"/)A +/-&))- ()&- '%/<-+/<'0&" 0R '%/ 0 A ?%#.) +/) '+#0) '>" ,"$)#) - 0"#&-'- 0T " 05 8 =)&% '>" (" (-/"" /%/ ,- $%,,%/% -/&"#,"')#" " - 0"#&-'- :"(() ')&"/) '>" '-#'%/:) 0T ,%/% ,%(% #%,,- % 0"#:-A 03 /%/ $%&#)//% ",,"#" '%(("<)&- :) +/) ')&"/) :- 0"#&-'- <-)((- " ;(+8

Z+-/:- $%,,% '%/,-:"#)#" +/) ')&"/) :- ,%(- 0"#&-'- <-)((- " ;(+ '>" $)#&" :) 0T " ,').;-)#/" - '%(%#-8 H/ &)(.%:% -(0"#&-'" YT ,)#['%(%#)&% :- ;(+A " $%&#4 *+-/:- '%(%#)#" -(.-% 0"#&-'" Y :- <-)((%8

G+$$%/-).% :- :%0"# '%(%#)#" +/) *+)(,-),- .)$$) ,+ +/) 0)(- <-) '%." -/ ?-<+#)8

I) ,+$"#?-'-" '%/,-:"#)&) $#","/&) &#" !"#$%O
,- &#)&&) *+-/:- :- +/) ,+$"#?-'-" :- <"/"#" R8

!4 7289:; 86768; <6 =;4;:6 79=9AA3:6 5 37=;:3 D23EE:;F

V%\ H(/+."#% .-/-.% :- '%(%#- /""",,)#- :-$"/:" :)(<"/"#" $:"(() ,+$"#?-'-"8

V"(Q]^_ !"#'` a%>/ b")c%%:)??#%/&) *+",&% $#%;(".) '%/,-":#)/:% ,+$"#?-'- '>-+," " %#-"/&);-(-D

0(&%()*
H(.-/-.% /+."#% /""",,)#-% :- '%(%#- $"# $%&"# '%(%#)#" *(+),- .)$$) ,+ +/) ,+$"#?-'-" '>-+,) " %#-"/&);-(" :- <"/"#" $ 3 :)&% :)(() ?%#.+()

=%0"
6 (" $)#"/&",- d e -/:-')/% -(&#%/')."/&% :"(() $)#&" :""-.) ("A $"#'-4 :"(#-,+(&)&% :"(() ?#)@-%/" ,- .)/&-"/" ,%(&)/&% () $)#&" -/&"#)
6 / 3 () ')#)&&"#-,&-') :- f+("#% :"(() ,+$"#?-'-" " *+-/:- / g T h T$

U-&%#/)/:%)($#%;(".) -/-@-)("D
() ,+$"#?-'-" :"(() 0)(-<-) >) <"/"#" RA *+-/:- () ,+) ')#)&&"#-,&-') :- f+("#% 3 658

=+/*+" ,%/% /""",,)#-)($-1 /%0" '%(%#-8

!"# $% &'(&)*+)*, ,$&*,$$)-,#., /% ."&"+"0%) %#)*., -) $% &'( )#)+%11)% + +)2"*" /%)*.%$.
34, $% $"#" &"$.% /)2)#.%)++) *,)+.5 '.%+%11)#/" +" $.,$$" -,."/76*,)*, %+ $"00,..")+ 7%#,
/% 3"#"$3,*, ,/ ,$&*%-,*, &%8 &*"7"#/)-,#., 9',++) 34, : $.).) +) +"*" ,$&, *%,#1);
<# 9',$., .*)$7"*-)1%"#%)+3'#% ,+,-,#.% $"#" $.).% /,7"*-).%= .%*) /%+).).% " $34%)33
-,#.*,)+.*% $"#" *%-)$.% %#2)*%).%;

!"#$%" &'()*+,-./01-233

> ?)--%#)2" +'#0" +) $.*)/) 3"# /',)-%3%
9')#/" %-$"+, .*)-"#.(= %-3%,+"$%.%#$,
)++@%-&*"22/%*"$$" $)#0', ; A%7,*-)%= -%
)&&"00%)$.)#3" -"*.")/ '#) &)+%11;.B'+
7%"*/"#,*" ()11'**" , $'++)3%..3@,*)#'$)#0',
, +%#0'/%7"'3" ; <-%,%)-%3%3"#.%#')2)#")
3)--%#)*, , %".*,-)2")#3"*) /%&)'*) ;;; D
$,#.%234, '# 0*)#/, '*+" %#7%#&,*2)/,2) +)
#).'*) E
?"# 9',$., &)*"+, D/2)*/ A'#34 /,$3*%2,
+F,$&,*%,#1) 34, +" &"*.,*5) /%&%#0,*, %+ 9')/*"
GHF'*+"I= %# 3'% %+ $"00,.." #"# : '#) 7"*-) -)
'#F,$&,*%,#1);
HF"-" 2%,#, *)&&*,$,#.)." 3"-, '#" $&%*%."
,2)#,$3,#.,= /,$.%#).") $3"-&)*%*, /) '#
-"-,#.")++F)+.*"6 /% +'% #"# *%-)#, #'++) $,
#"# %+ 0*%/"= <+ .*,-"*, , +F)#0"$3%) /) 3'% +)
#).'*) , %+ &),$)00%" 3%*3"$.)#., 2,#0"#"
&,*2)$%;
HF)*.%$.) $.) /,$3*%2,#/" '#) $') ,$&,*%,#1)J %+
$"' $3"&" : /% ,$&*%-,*,)..*)2,*$" +) 7"*-)= %
3"+"*% , % $,0#% 3%(34, 4) *,)+-,#., 2%$$'.";

!"#$%&'()*+,'(&%-&'(./01/$2(/(123./%%& 3# 42$.&5/'(
+)67,'8(40'(92%%/$-2(52:-&52%/ ;3%&((

;$<#$"8%,=$<>+,-2931-2.2

W'..% % &*"0*,$$% &"*.).% /)++) $3%,#1)= /) .,3#%3) , /) '# 3,*." '$" /,++) *)0%"#, #"# 4)##" &".'." ,2%.)*, %+ /*)--) /,++) X*)#/, X',**); X+%)*.%$.% 3,*3)#")+.*, $.*)/, #,+ .,#.).%2" /% &"*$% %# *,+)1%"#, 3"+ *,)+,; B)+2)/"* Q)+Y &,*3"**, +F'+.%-" .,**%."*%" /) ,$&+"*)*,= ,#%0-).%3" , %#$"#/)U%+,= 9',++" /,+ &*"&*%" %#3"#$3%";

<# 9',$.F"&,*) 0+% ,+,-,#.% , +, -)334%#, 3"$.*'%., /)++F'"-" &*"&*%" &,* *)1%"#)+%11)*, %+ .,-&" $"#" *)&&*,$,#.).% 3"-, $, $% $.,$$,*" $3%"0+%,#/"J &,*/"#" +) +"*" 7"*-) , +" $3"&" &,* %+ 9')+, $"#" $.).% 3*,).%; !"# ,$%$., &%8 #'++) /% "00,..%2"; <+ *,)+, : '#F)&&)*,#1);

H) 7%0'*) U%)#3) *)&&*,$,#.).))+ 3,#.*" /,++F"&,*) : 3"-, '# '"-"= $7%0'*)." , *%-"/,++)."= &*%2" /% 9')+'#9', $.*'..'*))..%#,#.,)++) 7%0'*) '-)#);

!2(1/$3-3./5:2 =/%%2 0/0&$-2 F!2(1/$3-3./54-2 =/(%2($-2) &0/%0J'(&%-&(3# ./%2@(
IG6,,(40@()+,)@(P#3/#0(&T(P&=/$5(Q$.@(U/S(V&$W(

4%$()56,7$)8(+,-2921-22:

M#) /,++, %--)0%#% /) 3'% N)3"# $% /%3, ,$$,*, "$$,$$%"#)." : %+ *%.*).." /% O)&) <##"3,#1" P *,)+%11)." /) Q%,0" R,+519',1 #,+ KLST;

HF,+,-,#." 34, /% 9',$.F%--)0%#, &%8 +" ."*-,#.) : %+ 3"+"*, *"$$"= 34, 2%,#, %#.,$" #"# &%8 #,++) $'))33,1%"#, $%-U"+%3) -) 3"-, *%34%)-")/ '#) 3)*#)+%.5; !,++, $', %#.,*2%$., &)*+) $&,$$" /,++F G)&&)*,#1) /,++, 3"$,I= '#) /,7%#%1%"#, 34, &,* +'% %#/%3) '#%3)-,#., %+ +"*" ,$$,*, 7).., /% 3)*#,= %+ +"*" ,$$,*, -"*.)+%;

N)3"#= *%&*"&"#,#/" %+ -,/,$%-" $"00,.."= $7*'..) +) &".,#1) /,++, &,##,++)., , /,+ 3"+"*,= 34, 2%,#, .%*).."= 9')$% 0*)77%)." $'++) .,+)= 3"-, $, +) 7%0'*) /,+ &)&) 7"$$, &,*2)$) /)+ 0*%%/" , /)+ /*)--) /% '# '"-" 34, #"# *%,$3,)/)77,*-)*, #%,#.F)+.*" 34, $V;

O.#=-& =2% $-.$2..& =- >55&4/5:& ?@
)+8,@ ;%-& 3# ./%2@)8,6))* 40@ A/3
P&-5/3 Q$. R/5./$ =- A/3 P&-5/3'
>&S2@

<@$2..& =- 1212 >55&4/5:& ?@
A-/B& C/%D:E#/:@ ;%-& 3# ./%2
F)GH6)IH 40J)K8H@ 92%%/$-2 A&$-2
L201M-%N' <&02@

?@(%A,&88%@+,-.2.1-2./

HF)*.%$.) -"/,++) '#) 7%0'*) 7,--%#%+,)..*)2,*$" 2"+'-% &+)$.%3%= -"#'-,#.)+% , /%#)-%3%;
<+ 3"*&" #"# : &%8 %#.,$" 3"-, 9')+3"$) /% $.).%3" , /% %--'.)U%+, -) 3"-, 9')+3"$) %# /%2,#%*,; <+ 2"+." 9')$% $3"-&)*, 3"-, #,++, 2,#,*% &*,%$."*%34, [/,, /,++) 7,*.%+%.5 , #, *%-)#, $"+" '#)33,##"J %+ 3"*&" #"# 4) &%8 #'++) /% 3)*)..,*%$.%3" ,)&&)*, 3"-, '#) *"33%) ,*"$) /)+ 2,#." , /)+ .,-&";
D-,*0"#" '#) $,*%, /% *)&&"*.% .*) &%,#% , 2"'.%= .*) 7"*-, 3"#3)2, , 3"#2,$$,; !,++) 7%0'*) $%)&*"#" /,% U'34%= 3"-, 2"*)0%#% %#3"+-)U%+%= -))++" $.,$$" .,-&" 2)*34%= 3"-, &"*.)+% /))..*)2,*$)*, 34, -,.."#" %# *,+)1%"#, +F'"-" 3"# '# "+.*, /% 3'% : 7).." , /) 3'% #"# &'(&*,$3%#/,*,= 3"# '#" $&)1%" 34, :)+.*" /) $:;

</4#0X/5.(Y-B#$/'()+,*@(9$//5(Z&$5.&$5 3.&5/@(
**6),I67,(40'(8IH(WB@([2./(P&=/$5'(!&5=$2@

B(56*,C$D88%+,-2E3

GB"#" $,-&*, $.)." 3"#2%#." 34, ,$%$.) '# "*%11"#., &%8 2)$." /% 9',++" 34, &"$$%)-" 2,/,*,;;;I= 3"# 9',$., &)*"+,]#%$4 ^)&""* /,$3*%2, %+ .,#.).%2" /% 3*,)*, /,++, $3'+.'*, 34, $% &"#0)#" 3"-, .*)-%., .*) +) $7,*) .,**,#) , 9',++) 3,+,$.,; _&,*, %# 3'% 3%(34, $,-U*) ,$$,*, '# 2"+'-, &%,#" $% $-).,*%)+%11) , $% /%+).) /% 7*"#.,)% #"$.*% "334%)&*,#/"= #,+ *%0%/" $`a+%#, 7).." /% +%#,, "*."0"#)+% /% '#) 3%..5 -,.*"&"+%.)#)= '#) /%-,#$%"#, '+.*).,**,#)= #""2) , %#)$&,..).)= 3)&)3, .)#." /%)33"0+%,*3% #,+ $"" *%7+,$$" 9')#." /% *,$&%#0,*3% 3"# +) $') 7"*-) %-&,#,.*)U%+,;
HF"&,*) 2%2, /,++) *,+)1%"#, 34, ,$$) $.,$$) %#$.)'*) 3"# +" $&)1%" 3%*3"$.)#.,= 7'#0,#/" /) ,+,-,#." /% *)33"*/" .*) +) /%-,#$%"#, .,**,#) , 9',++) /%2%#);

R%&#= 92./@ Q[\[L%2:2' P-%%/55-#50 L2$W' RM-42B3Q@%-IH&G^IHHK')K*
%23.$/ =- 244-2-& -5&33-=2X-%/ 32%=2./@)H0 6 IH0 6&5&@)%2./@

F@%*$%",G5)*H@%+,-20:

c',$.) $.)-&) /%0%.)+,= #,++) $') 7*,//,11)= %#2%.)) '#) *,+)1%"#, %# 3'% +" $&,..)."*, $% .*"2) $&),$)." , /%$"*%,#.)." &,* +) -)#3)#1) /% '# 9')+'#9', *%7,*%-,#.";
<#7)..% +F)*.%$.) &"#, &*"&*%" +" $&,..)."*, 3"-, &'#." 7%$$" /% 7*"#.,) 9')+3"$) 34, $,-U*) &)$$)*0+% /)2)#.%6 %--)0%#% 34, $% $'$$,0"'#" 7"'*% /) '# 7%#,$.*%#"= -%0+%)%) /% %--)0%#% 34, $3"**"#" %#,$"*)U%+% $'% #"$ $34,*-%= %+ &%8 /,++, 2"+., $,#1) +)$3%)*, %# #,$$'#) .*)33%); ?"-, $, #'++) 7"$$, 3)&)3, /% &,#,.*)*, %# #"% %# -"/" &,*-)#,#., , "0#% 3"$) *%-)#,$$, %# $'&,*7%3%,;

O.$-1'(IH))()KH(406(,HH(40@(O.2012 =-B-.2%/ 3#

42$.2(0&5.2.2 .$2 2%%#0-5-& /(L/$31/6(FA-23/4J@

I8(A,J%$KK+,-232

?%(34, 3F: /,++F"'-" $3"-&)*, 9')$% /,+ .'.." %# '#) 7"*-) "*0)#%3) , &*%-%0,#%) 34, $% /%+).) , $% ,$&)#/, #,++" $&)1%" 3%*3"$.)#., 3"-,)++) *%3,*3) /% '#) $.*'..'*); ?"-, $, +) -).,*%) /% 3'% : 7).." %+ -"#/")2,$$, 3"-%#3%).")/)0%.)*$% $,#1) .*"2)*, &)3,; B"#" 7"*-, , $3'+.'*, 34, .,#.)#" 9')$% /% &"*$% .*) 3%(34, 3F:= 34, : /)."= , 3%(34, 2%,#, 3*,).", /)++ -)#% /,++F"'-"J 3"-, $, +) -).,*%) $.,$$) 2"+,$$, ."*#)*,)+ $"' $.)." "*%0%#)+, &,* $2,+)*, +) -)#" /,+ ?*,)."*, 34,)++) $') "*%0%#, +F4) -"/,++).); B"#" "&,*, 34, &)*+)#" /,++) 2%= 34, /)##" +) $,#$)1%"#, /% '# -"." &,*&,.'" %# 0*)/" /% $"++,2)*3% /)++) 7%$%3%.5 /,++, 3"$,;

_%%-1.-42%(R&%#05'(IHH+'(244-2-& -5&33-=2X%(/@%(0$$2-(

P-%25&'()K(21$-%/ IH)8@